SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Davide Guidetti

NUOVI RISULTATI SU PROBLEMI INVERSI PER EQUAZIONI INTEGRODIFFERENZIALI DI TIPO PARABOLICO

8 maggio 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Summary. I present some new results, concerning identification of convolution kernels in integrodifferential equations of parabolic type. I consider, in particular, fully nonlinear equations with kernels depending only on time and linear equations with kernels which can depend also on some of the space variables.

Riassunto. Presento alcuni risultati nuovi sull'identificazione di nuclei di convoluzione in equazioni integrodifferenziali di tipo parabolico. Considero, in particolare, equazioni totalmente non lineari con nuclei che dipendono solo dalla variabile temporale ed equazioni lineari con nuclei che possono dipendere anche da qualcuna delle variabili spaziali.

Introduzione I problemi inversi consistono nello studio di equazioni di vario tipo (tipicamente differenziali o integrodifferenziali), in cui ció che tradizionalmente viene assunto come dato é conosciuto solo parzialmente. Questa carenza di informazione é compensata dalla conoscenza di qualche aspetto della soluzione, tradizionalmente assunta come totalmente incognita.

In [9] considerai vari esempi di problemi differenziali e integrodifferenziali. Qui mi occuperó esclusivamente di equazioni integrodifferenziali di tipo parabolico ed esporró qualche nuovo risultato, ottenuto in collaborazione con F. Colombo, del Politecnico di Milano, e con A. Lorenzi, dell' Universitá di Milano. Piú specificamente, mi occuperó della determinazione (contemporaneamente alla soluzione) di nuclei di integrazione per equazioni integrodifferenziali di tipo parabolico. L'esempio piú semplice del tipo di problema che vado a considerare é il seguente: consideriamo l'andamento della temperatura u in un corpo Ω costituito da un materiale omogeneo con memoria. Se u é mantenuta costante sul bordo $\partial\Omega$ di Ω (per semplicitá, supponiamo $u(t,x) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \partial\Omega$) e se é noto il suo andamento prima di $t = 0$, un modello matematico standard di u (con qualche semplificazione) é costituito dal problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s,x)ds + f(t,x) & (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ove $h :]0,T] \to \mathbf{R}$ rende conto del fatto che il materiale é con memoria. Assegnata h, l'equazione (1) nell'incognita u é stata abbondantemente studiata. Nella pratica, peró, h é raramente conosciuta. A compensare questa carenza di informazione, é spesso possibile determinare l' andamento di un certo funzionale ϕ in corrispondenza della soluzione u. Per esempio, é talvolta possibile fissare un certo punto $x_1 \in \Omega$ e osservare l'andamento della temperatura $u(t,x_1)$ al variare di t in $[0,T]$. In tale caso, l'indeterminatezza di h é compensata dalla conoscenza di $u(t,x_1)$ per ogni $t \in [0,T]$. Piú in generale, supponiamo assegnato

$$\phi(u(t,.)) = g(t), \tag{2}$$

ove ϕ é un opportuno funzionale. Una versione astratta del problema (1) fu studiata nel lavoro [10].

Un problema totalmente non lineare Consideriamo ora una generalizzazione astratta totalmente non lineare del problema (1). Il problema é

il seguente: determinare $\tau > 0$ e due funzioni $u : [0, \tau] \to D$, $h : [0, \tau] \to \mathbf{R}$, tali che

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = G(u(t)) + \int_0^t h(t-s)F(u(t), u(s))ds + f(t), & t \in [0, \tau], \\ u(0) = u_0, & \\ \Phi(u(t)) = g(t), & t \in [0, \tau]. \end{cases} \tag{3}$$

Qui D e X sono due spazi di Banach, $D \subseteq X$ con immersione contunua, $G : D \to X$, $F : D \times D \to X$, $f : [0, T] \to X$, $u_0 \in D$ si suppongono noti. L'ignoranza del nucleo h é compensata dalla conoscenza di $\Phi(u(t))(= g(t))$, con Φ funzionale lineare e continuo su X. Il problema (2) si suppone parabolico nel seguente senso: che il differenziale secondo Frechét $G'(u_0)$ di G in corrispondenza di u_0 (che é un operatore lineare e continuo da D a X) é un operatore settoriale in X. Ció significa quanto segue:

(I) l'insieme risolvente $\rho(G'(u_0))$ di $G'(u_0)$ contiene $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \geq R, |Arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2}\}$, per qualche $R > 0$;

(II) esiste $M > 0$ tale che, per ogni λ nella regione suddetta, $\|(\lambda - G'(u_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M|\lambda|^{-1}$.

In un lavoro sostanzialmente ultimato in collaborazione con F. Colombo (vedi [1]) abbiamo studiato il problema (2) utilizzando metodi di regolaritá massimale in spazi di Sobolev di ordine non intero. Tali spazi sono preferibili ai piú classici spazi di Sobolev di ordine intero in quanto ammettono una teoria della regolaritá massimale assai piú semplice (vedi, ad esempio, [6] per risultati di regolaritá massimale in spazi di Sobolev di ordine intero). Precisiamo che per risultato di regolaritá massimale intendiamo un risultato di isomorfismo vettoriale e topologico. Per enunciare il risultato che ci interessa, é necessario introdurre alcune definizioni preliminari.

Cominciamo col richiamare la definizione di spazio di Sobolev di ordine $\beta \in]0, 1[$. Sia $p \in [1, +\infty]$, sia X uno spazio di Banach e $T > 0$. Poniamo

$$W^{\beta,p}(0, T; X) := \begin{cases} \{f \in L^p(0, T; X) : \int_0^T (\int_0^t \frac{\|f(t)-f(s)\|_X^p}{(t-s)^{1+\beta p}} ds < +\infty\} \\ \text{se } p < +\infty, \\ C^\beta(0, T; X) \text{ se } p = +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Qui $C^\beta(0, T; X)$ indica il classico spazio delle funzioni hölderiane di ordine β. Sia A un operatore settoriale in X. É noto che A é il generatore infinitesimale di un semigruppo $(T(t))_{t \geq 0}$ non necessariamente fortemente continuo in 0

(non supponiamo che il dominio di A sia denso in X). Sia $\beta \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$. Poniamo

$$D_A(\beta,p) := \{x \in X : t \to \|t^{1-\beta-\frac{1}{p}} AT(t)x\|_X \in L^p(0,1)\}. \quad (5)$$

Possiamo ora enunciare il risultato di regolaritá massimale che utilizzeremo per il problema inverso:

Teorema 1 *Sia A un operatore settoriale nello spazio di Banach X. Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (6)$$

Le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché il problema (6) abbia una soluzione (unica) u appartenente a $W^{1+\beta,p}(0,T;X) \cap W^{\beta,p}(0,T;D(A))$, per assegnati $p \in]1,+\infty]$ e $\beta \in]0,1[\setminus \{\frac{1}{p}\}$:

(I) $f \in W^{\beta,p}(0,T;X)$;

(II)

$$u_0 \in \begin{cases} D_A(\beta + 1 - \frac{1}{p}, p) & se \quad \beta < \frac{1}{p}, \\ D(A) & se \quad \beta > \frac{1}{p}; \end{cases}$$

(III) se $\beta > \frac{1}{p}$, allora $Au_0 + f(0) \in D_A(\beta - \frac{1}{p}, p)$.

[1] contiene una dimostrazione diretta del teorema 1. Una diversa dimostrazione si puó anche ottenere da certi recenti risultati di G. Di Blasio (vedi [5]).

Torniamo ora al problema (3). La difficoltá principale sta nel fatto che la prima condizione é un'equazione di Volterra di prima specie nell'incognita h. Ora, una strategia standard per passare da un'equazione di Volterra di prima specie a un'equazione di seconda specie é derivare l'equazione. Affinché ció sia possibile, si é costretti a cercare una soluzione u assai regolare. Piú precisamente, cercheremo una soluzione (u,h) di (3) con $u \in W^{2+\beta,p}(0,\tau;X) \cap W^{1+\beta,p}(0,\tau;D)$ e $h \in W^{\beta,p}(0,\tau)$ (a valori scalari), per qualche $\beta \in]0,1[$, $p \in]1,+\infty]$, $\tau > 0$. Vale il seguente

Teorema 2 *Consideriamo il problema (3). Fissiamo preliminarmente $p \in]1,+\infty]$ e $\beta \in]0,1[\setminus \{\frac{1}{p}\}$. Introduciamo le seguenti ipotesi:*

(a) $G \in C^3(D;X)$, $F \in C^3(D \times D;X)$;

(b) $u_0 \in D$;

(c) $A := G'(u_0)$ *é un operatore settoriale in* X*;*
(d) $f \in W^{1+\beta,p}(0,T;X)$*;*
(e)

$$G(u_0) + f(0) \in \begin{cases} D_A(\beta + 1 - \frac{1}{p}, p) & se \quad \beta < \frac{1}{p}, \\ D & se \quad \beta > \frac{1}{p}; \end{cases}$$

(f) $g \in W^{2+\beta,p}(0,T)$*;*
(g) $\Phi(u_0) = g(0)$*,* $\Phi(G(u_0) + f(0)) = g'(0)$*;*
(h) $\chi := \Phi(F(u_0, u_0)) \neq 0$*;*
(i) se $\beta > \frac{1}{p}$ *e*

$$\mathcal{H} := \chi^{-1}\{g''(0) - \Phi[A(G(u_0) + f(0)) + f'(0)],$$

allora

$$A[G(u_0) + f(0)] + f'(0) + \mathcal{H}F(u_0, u_0) \in D_A(\beta - \frac{1}{p}, p);$$

(l) $F(u_0, u_0) \in \overline{D}$*.*

Allora il problema (3) possiede almeno una soluzione $(u,h) \in (W^{2+\beta,p}(0,\tau;X) \cap W^{1+\beta,p}(0,\tau;D)) \times W^{\beta,p}(0,\tau)$*, per qualche* $\tau \leq T$*. Inoltre, se* $F(u(t), u_0) \in \overline{D}$ *per ogni* $t \in [0,\tau]$*, tale soluzione é anche unica in* $[0,\tau]$*.*

Osservazione Si verifica facilmente che le ipotesi (b), (c), (f) e (g) sono necessarie per ottenere una soluzione con la regolaritá voluta. Sotto la condizione (h), si verifica poi che anche le ipotesi (e) e (i) lo sono. Ció segue abbastanza facilmente dal teorema 1 (vedi la dimostrazione successiva).

Cenno della dimostrazione del teorema 2 Ammettiamo che il problema (3) possieda una soluzione (u,h) appartenente a $(W^{2+\beta,p}(0,\tau;X) \cap W^{1+\beta,p}(0,\tau;D)) \times W^{\beta,p}(0,\tau)$, per qualche $\tau \leq T$. Poniamo $v := \partial_t u$. Allora, derivando la prima equazione e ricordando che $A := G'(u_0)$, si ottiene che $(v,h) \in (W^{1+\beta,p}(0,\tau;X) \cap W^{\beta,p}(0,\tau;D)) \times W^{\beta,p}(0,\tau)$ e risolve il problema

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = Av(t) + h(t)F(u_0, u_0) + f'(t) + \mathcal{P}(v,h)(t) & t \in [0,\tau], \\ v(0) = G(u_0) + f(0), & \\ \Phi(v(t)) = g'(t), & t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{7}$$

ove

$$\mathcal{P}(v,h)(t) := [G'(u_0 + 1 * v(t)) - A]v(t) + h(t)[F(u_0 + 1 * v(t), u_0) + -F(u_0, u_0)] + \int_0^t h(t-s)dF(u_0 + 1 * v(t), u_0 + 1 * v(s))(v(t), v(s))ds. \tag{8}$$

Qui abbiamo indicato con $*$ la convoluzione su $[0, +\infty[$. Si osservi che $u = u_0 + 1 * v$. La prima equazione in (7) é stata scritta in modo da evidenziare il fatto che pensiamo al secondo membro come a una perturbazione di $Av(t) + h(t)F(u_0, u_0) + f'(t)$.

Applichiamo ora Φ alla prima equazione. Usando l'ultima condizione in (7) e l'ipotesi (h), otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = Av(t) + h(t)F(u_0, u_0) + f'(t) + \mathcal{P}(v, h)(t) & t \in [0, \tau], \\ v(0) = G(u_0) + f(0), \\ h(t) = \chi^{-1}[g''(t) - \Phi(Av(t) + \mathcal{P}(v, h)(t) + f'(t))], & t \in [0, \tau], \end{cases} \tag{9}$$

Si tratta ora di risolvere il sistema (9). La formula di variazione delle costanti consente di riscrivere la prima condizione in (9) nella forma

$$\begin{array}{c} v(t) = T(t)[G(u_0) + f(0)] + \int_0^t T(t - s)f'(s)ds + \\ + \int_0^t T(t - s)[h(s)F(u_0, u_0) + \mathcal{P}(v, h)(s)]ds. \end{array} \tag{10}$$

Ora, l'ipotesi (l) consente di considerare, almeno nel caso $\beta < \frac{1}{p}$, anche $h(t)F(u_0, u_0)$ come una perturbazione, in quanto vale il seguente

Lemma 1 *Siano $\beta < \frac{1}{p}$, $h \in W^{\beta,p}(0, \tau)$ e $y \in \overline{D}$. Allora*

$$\| \int_0^{\cdot} T(\cdot - s)h(s)yds \|_{W^{\beta,p}(0,\tau;D)} \leq \eta(\tau) \|h\|_{W^{\beta,p}(0,\tau)},$$

con $\lim_{\tau \to 0} \eta(\tau) = 0$.

Se i termini di perturbazione fossero nulli, si potrebbe utilizzare il teorema 1, determinare una soluzione $v \in W^{1+\beta,p}(0, \tau; X) \cap W^{\beta,p}(0, \tau; D)$ del sistema costituito dalle prime due equazioni e ricavare h dall'ultima condizione in (9). Le ipotesi sui dati iniziali (d), (e) e (i) sono proprio ció che serve per poter applicare il teorema 1. Piú in generale un metodo perturbativo standard, basato sul teorema delle contrazioni, permette in ogni caso di trovare una soluzione su un intervallo $[0, \tau]$ con τ "piccolo". □

Un' applicazione del teorema 2 Vediamo ora un'applicazione del teorema 2 a una generalizzazione di un problema di dinamica delle popolazioni (vedi [7]). Consideriamo il seguente problema misto quasi lineare:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = d(u(t,x))\Delta_x u(t,x)) + bu(t,x)\int_0^t h(t-s)u(s,x)ds + f(u(t,x)) \\ t \in [0,\tau], x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, t \in [0,\tau], x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \Omega, \\ \int_\Omega \phi(x)u(t,x)dx = g(t), t \in [0,\tau]. \end{cases} \tag{11}$$

nelle incognite $u : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbf{R}$ e $h : [0,\tau] \to \mathbf{R}$. Qui Ω é un aperto limitato e regolare in $\mathbf{R}^n$ e $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo ancora che l'indeterminatezza di h é compensata dalla prescrizione di $\int_\Omega \phi(x)u(t,x)dx$. Supponiamo anche che:

(h_{11}) *$d \in C^3(\mathbf{R})$ e $d(u) > 0$ per ogni u in $\mathbf{R}$;*
(h_{12}) *$\phi \in L^{p'}(\Omega)$, con $p > 1 \vee \frac{n}{2}$;*
(h_{13}) *$f \in C^3(\mathbf{R})$.*

Poniamo

$$X := L^p(\Omega), \tag{12}$$

$$D := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \tag{13}$$

$$G : D \to X, G(u) := d(u)\Delta u + f(u) \forall u \in D, \tag{14}$$

$$F : D \times D \to X, F(u_1,u_2) := bu_1u_2 \forall u_1, u_2 \in D. \tag{15}$$

Osserviamo che da (h_{12}) segue che D é immerso con continuitá in $C(\overline{\Omega})$ ed é facile verificare che $G \in C^3(D;X)$, mentre $F \in C^3(D \times D;X)$. Se $u_0 \in D$, si ha inoltre

$$Av = G'(u_0)v = d(u_0)\Delta v + [\Delta u_0 d'(u_0) + f'(u_0)]v \quad \forall v \in D. \tag{16}$$

É ben noto (vedi, ad esempio, [12]) che A, di dominio D, é un operatore settoriale in X. Si osservi che in questo caso si ha $\overline{D} = X$.

L'ultimo ingrediente che manca per poter applicare il teorema 2, é la specificazione degli spazi $D_A(\theta,p)$, con $\theta \in]0,1[$. Nel caso specifico, si puó verificare che, con equivalenza di norme, per $\theta \neq \frac{1}{2p}$,

$$D_A(\theta,p) = \begin{cases} B^{2\theta}_{p,p}(\Omega) & \text{se} \quad 0 < \theta < \frac{1}{2p}, \\ \{u \in B^{2\theta}_{p,p}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{se} \quad \frac{1}{2p} < \theta < 1. \end{cases} \tag{17}$$

ove, con la scrittura $B^{\beta}_{p,q}(\Omega)$, indichiamo lo spazio di Besov di indici corrispondenti.

Per una dimostrazione di questo risultato, dovuto a P. Grisvard, si veda anche [8].

É a questo punto un facile esercizio, che lasciamo volentieri al lettore, applicare il teorema 2 allo studio del problema (11).

Nuclei dipendenti anche da variabili spaziali e soluzioni globali Come qualcuno avrá osservato, il risultato astratto contenuto nel precedente teorema 2 é di tipo locale nella variabile temporale: in generale si é in grado di provare l'esistenza e unicitá di una soluzione solo in brevi intervalli temporali. Si osservi che anche nel caso lineare la questione é tutt'altro che banale,in quanto, anche se si parte da un problema lineare in u, il problema inverso é non lineare nell'incognita (u, h) (si consideri, ad esempio, (1)).

Nel caso lineare, con nucleo dipendente esclusivamente da t, l'esistenza di una soluzione globale é stata studiata in [11]. Un altro problema interessante é costituito dalla determinazione del nucleo h nel caso in cui esso non dipenda esclusivamente dal tempo.

Un risultato in questa direzione é stato ottenuto in [4]. Un altro risultato, di tipo astratto, é stato ottenuto in [3] e ha il pregio di garantire anche l'esistenza e l'unicitá di una soluzione globale. Per darne un'idea, enuncio una semplice applicazione del risultato principale contenuto in [3].

Sia Ω il quadrato $]0,1[\times]0,1[$ $(\subseteq \mathbf{R}^2)$ e sia $T > 0$. Vogliamo determinare due funzioni $U : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ e $k : [0,T] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x,y) = \Delta u(t,x,y) + \int_0^t k(t-s,x)\Delta u(s,x,y)ds + f(t,x,y), \\ \qquad t \in [0,T], (x,y) \in \Omega, \\ u(t,x,y) = 0, t \in [0,T], (x,y) \in \partial\Omega, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), (x,y) \in \Omega, \\ \int_0^1 \phi(x,y)u(t,x,y)dy = g(t,x), t \in [0,\tau], x \in [0,1]. \end{cases} \tag{18}$$

Qui abbiamo indicato con Δ l'operatore di Laplace nelle variabili (x, y). Osserviamo che stiamo cercando di determinare un nucleo k dipendente dalle variabili t e x.

Indichiamo ora con A l'operatore definito come segue:

$$D(A) := \{u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \Delta u \in C(\overline{\Omega})\}, \tag{19}$$

$$Au := \Delta u \quad \forall u \in D(A). \tag{20}$$

É noto che A é un operatore settoriale in $C(\overline{\Omega})$ (vedi [2]) e $D(A) \subseteq \cap_{\epsilon>0} C_0^{2-\epsilon}(\overline{\Omega})$, ove abbiamo posto

$$C_0^{\beta}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^{\beta}(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = 0\}. \tag{21}$$

Teorema 3 *Sia $\beta \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(a) $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$;
(b) $f \in C^{1+\beta}([0,T];C(\overline{\Omega}))$;
(b) $u_0 \in D(A)$, $v_0 := Au_0 + f(0)(= \Delta u_0 + f(0)) \in D(A)$;
(c) $\int_0^1 \phi(x,y)\Delta u_0(x,y)dy \neq 0 \ \forall x \in [0,1]$;
(d) $g \in C^{2+\beta}([0,T];C([0,1]) \cap C^{1+\beta}([0,T];C^2([0,1])$, $g(t,0) = g(t,1) = 0$ $\forall t \in [0,T]$;
(e) $\int_0^1 \phi(x,y)u_0(x,y)dy = g(0,x)$, $\int_0^1 \phi(x,y)(\Delta u_0(x,y) + f(0,x,y))dy = \partial_t g(0,x)$ $\forall x \in [0,1]$;
(f) $\Delta v_0 + \partial_t f(0) + k_0\Delta u_0 \in C_0^{2\beta}(\overline{\Omega})$, *ove*

$$k_0(x) := \frac{\partial_t^2 g(0,x) - \int_0^1 \phi(x,y)\Delta^2 u_0(x,y)dy}{\int_0^1 \phi(x,y)\Delta u_0(x,y)dy}.$$

Allora, il problema (18) possiede un'unica soluzione (u,k), con $u \in C^{2+\beta}([0,T];C(\overline{\Omega}) \cap C^{1+\beta}([0,T];D(A))$ e $k \in C^{\beta}([0,T];C([0,1]))$.

Bibliografia

[1] F. Colombo, D. Guidetti, "A unified approach to nonlinear integrodifferential inverse problems of parabolic type", in corso di stesura.

[2] F. Colombo, D. Guidetti,A. Lorenzi,"Elliptic equations in non-smooth plane domains with an application to a parabolic problem", preprint.

[3] F. Colombo, D. Guidetti,A. Lorenzi,"Integrodifferential identification problems for thermal materials with memory in nonsmooth plane domains", in corso di stesura.

[4] F. Colombo, A. Lorenzi, "Identification of time and space dependent relaxation kernels for materials with memory related to cylindrical domains, I-II", Jour. Math. Anal. Appl. 213, 32-62 (1997), 213, 63-90 (1997).

[5] G. Di Blasio, "Sobolev regularity for solutions of parabolic equations by extrapolation methods", di prossima pubblicazione in Adv. Diff. Eq..

[6] G. Dore, A. Venni, "On the closedness of the sum of two closed operators", Math. Z. 196, 189-201 (1987).

[7] S. A. Gourley, N. F. Britton, "On a modified Volterra population equation with diffusion", Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl. 21(5), 389-395 (1993).

[8] D. Guidetti, "On interpolation with boundary conditions", Math. Z. 207, 439-460 (1991).

[9] D. Guidetti, "Alcuni problemi inversi per equazioni a derivate parziali", Sem. Anal. Mat. Dipartimento di Matematica, Universitá di Bologna, A.A. 1999-2000, Tecnoprint -Bologna (2000).

[10] A. Lorenzi, E. Sinestrari, "An inverse problem in the theory of materials with memory", Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl. vol. 12, 1317-1335 (1988).

[11] A. Lorenzi, E. Sinestrari, "Stability results for a partial integrodifferential inverse problem", Pitman Research Notes in Math. 190, 271-294 (1989).

[12] H. Tanabe, *Equations of evolution* , Pitman (1979).